第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2-2x+4y+6$ の最小値を求めよ．

(2)　$2x+y=3$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最小値を求めよ．

(3)　$x^2+y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=2x+y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(5)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　$(x-1)^4+y^2=25$ のとき $f(x,\ y)=3(x-1)^2+4y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，
　　最小値 -25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3}i,\ -4)$ のとき〕

㋑　最大値 20〔$(x,\ y)=(1,\ 5)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

㋒　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2-2x+4y+6$ の最小値を求めよ．

(2)　$2x+y=3$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最小値を求めよ．

(3)　$x^2+y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+2xy+3y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=2x+y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(5)　$x^2+2xy+3y^2=4$ のとき $f(x,\ y)=x^2+y^2$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最小値 $\frac{1}{2}$ $\left(x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{2}\text{ のとき}\right)$　(2) 最小値 2 $\left(x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(3) 最大値 $8+4\sqrt{2}$ 〔$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ のとき〕,
最小値 $8-4\sqrt{2}$ 〔$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \mp\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ のとき〕（いずれも複号同順）

(4) 最大値 $3\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{5\sqrt{2}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{3}\text{ のとき}\right)$, 最小値 $-3\sqrt{2}$ $\left(x=-\frac{5\sqrt{2}}{3},\ y=\frac{\sqrt{2}}{3}\text{ のとき}\right)$

(5) 最大値 $2(2+\sqrt{2})$ 〔$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \mp1)$ のとき〕,
最小値 $2(2-\sqrt{2})$ 〔$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \pm1)$ のとき〕（いずれも複号同順）

【解答】

(1)　$f(x,\ y)=(x+y-1)^2+2y^2+6y+5=(x+y-1)^2+2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ となるので，

$x+y-1=0$ かつ $y+\frac{3}{2}=0$ つまり $x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{2}$ のとき，**最小値 $\frac{1}{2}$** となる．

(2)　$2x+y=3$ より $y=3-2x$ であるので

$$\begin{aligned} f(x,\ 3-2x)&=x^2+2x(3-2x)+3(3-2x)^2\\ &=9x^2-30x+27\\ &=9\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+2 \end{aligned}$$

となる．$x=\frac{5}{3}$ のとき $y=3-2x$ より $y=-\frac{1}{3}$ であるので，$x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{1}{3}$ のとき

最小値 2 となる．

(3)　$x^2+y^2=4$ より $(x,\ y)=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける．

このとき

$$\begin{aligned} f(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)&=4\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+12\sin^2\theta\\ &=4\times\frac{1+\cos2\theta}{2}+8\times\frac{\sin2\theta}{2}+12\times\frac{1-\cos2\theta}{2}\\ &=4\sin2\theta-4\cos2\theta+8=4\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+8 \end{aligned}$$

となる．ここで $-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$ より

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$ すなわち $\theta=\frac{3}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi$ のとき $f(x,\ y)$ は最大値 $8+4\sqrt{2}$ をとり，

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$ すなわち $\theta=\frac{7}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$ のとき $f(x,\ y)$ は最小値 $8-4\sqrt{2}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\dfrac{3}{4}\pi}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ より $\sin\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

同様に $\cos\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ などより

$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ のとき **最大値 $8+4\sqrt{2}$**,

$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \mp\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ のとき **最小値 $8-4\sqrt{2}$**（いずれも複号同順）となる.

(4)　$2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ となるので，この式の表す直線と $x^2+2xy+3y^2=4$ の表す図形が共有点をもてばよい.

つまり，直線の式を代入した式 $x^2+2x(-2x+k)+3(-2x+k)^2=4$ すなわち

$$9x^2-10kx+3k^2-4=0 \quad \cdots\cdots①$$

が実数解をもつような k を考えればよいので

$(-5k)^2-9(3k^2-4)\geqq 0$ より $k^2\leqq 18$ ゆえに $-3\sqrt{2}\leqq k\leqq 3\sqrt{2}$

$k=3\sqrt{2}$ のとき, ①より $x=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$, このとき $y=-2x+k=-2\times\dfrac{5\sqrt{2}}{3}+3\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

となり, $k=-3\sqrt{2}$ のとき, ①と $y=-2x+k$ より同様に $x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となる.

以上より，$x=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき **最大値 $3\sqrt{2}$**,

$x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき **最小値 $-3\sqrt{2}$** となる.

(5)　$x^2+2xy+3y^2=4$ より $x^2+y^2\neq 0$ であるので，$x^2+y^2=k$ とおくと，この式は中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表すので，$(x,\ y)=(\sqrt{k}\cos\theta,\ \sqrt{k}\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表せる.

この円と $x^2+2xy+3y^2=4$ の表す図形が共有点をもてばよいということは,

$(x,\ y)=(\sqrt{k}\cos\theta,\ \sqrt{k}\sin\theta)$ を代入した式

$$k\cos^2\theta+2k\sin\theta\cos\theta+3k\sin^2\theta=4 \quad \cdots\cdots②$$

が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に実数解をもつような k を考えればよいが，(3)と同様の変形で

$k\cos^2\theta+2k\sin\theta\cos\theta+3k\sin^2\theta=k\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\right\}$ となり,

$\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2>0$ より②は $k=\dfrac{4}{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2}$ と変形できる.

このとき，右辺の分母は(3)と同様にして $(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \pm 1)$ のときに最大値

$2+\sqrt{2}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ をとり，$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \mp 1)$ のときに最小値

$2-\sqrt{2}=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$ をとるので,

$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}+1),\ \mp 1)$ のとき **最大値 $2(2+\sqrt{2})$**,

$(x,\ y)=(\pm(\sqrt{2}-1),\ \pm 1)$ のとき **最小値 $2(2-\sqrt{2})$**（いずれも複号同順）となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　複数の変数の取り扱い

41　$(x-1)^4+y^2=25$ のとき $f(x,\ y)=3(x-1)^2+4y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

㋐　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，
最小値 -25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3}i,\ -4)$ のとき〕

㋑　最大値 20〔$(x,\ y)=(1,\ 5)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

㋒　最大値 25〔$(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ のとき〕，最小値 -20〔$(x,\ y)=(1,\ -5)$ のとき〕

【答】　㋒

【解答】

$\{(x-1)^2\}^2+y^2=25$ より，$(x-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

$(x-1)^2=5\cos\theta,\ y=5\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表せる．このとき

$$\begin{aligned}f(x,\ y)&=3\cdot 5\cos\theta+4\cdot 5\sin\theta\\&=20\sin\theta+15\cos\theta\\&=25\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{ただし，}\alpha\text{ は }0<\alpha<\frac{\pi}{2}\text{ かつ }\tan\alpha=\frac{3}{4}\text{ を満たす実数}\right)\end{aligned}$$

であるので，$-\dfrac{\pi}{2}+\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ より，

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(x,\ y)$ は**最大値 25** をとる．

このとき，$5\cos\theta=5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=5\sin\alpha=5\cdot\dfrac{3}{5}=3$，

$5\sin\theta=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=5\cos\alpha=5\cdot\dfrac{4}{5}=4$ より $(x,\ y)=(1\pm\sqrt{3},\ 4)$ となる．

また $\theta+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x,\ y)$ は**最小値 −20** をとる．

このとき，$5\cos\theta=5\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=5\cdot 0=0$，

$5\sin\theta=5\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=5\cdot(-1)=-5$ より $(x,\ y)=(1,\ -5)$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。